per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Encara que fa un temps vaig dedicar un article a Martin Gardner, no puc evitar de fer-hi referència novament, atès que mentre escric aquestes línies s'està celebrant el centenari del seu naixement (Tulsa, Oklahoma, 21 d'octubre de 1914) i tant arreu del món com en el nostre entorn s'han programat nombrosos actes, entre els quals la matinal celebrada a la seu permanent de Cornellà de Llobregat del Museu de Matemàtiques de Catalunya, el dissabte 25 d'octubre, la xerrada que jo mateix vaig tenir el goig de fer en la XVII Trobada d'ABEAM, el 8 de novembre, o la que féu a Vilanova i la Geltrú, en una data prou curiosa: 14-11-14, el professor Pedro González Urbaneja, dins el marc dels berenars matemàtics que organitzen els amics del Garraf.

Tanmateix, no us proposaré problemes extrets de la immensa obra del qui fou el més gran divulgador de les matemàtiques del segle xx. Tan sols us recomano, tant a aquells qui ja coneixeu Martin Gardner com als qui voleu apropar-vos-hi per primera vegada, l'excel·lent monogràfic de la revista *Investigación y Ciencia*, edició espanyola de *Scientific American*, la revista en la qual Gardner publicà d'una manera ininterrompuda durant vint-i-cinc anys (1956-1981), i que porta per títol: *El universo matemágico de Martin Gardner. Juegos, acertijos, paradojas y otras maravillas recreativas*. Hi trobareu el primer article que va escriure per a la revista (desembre de 1956), així com alguns dels textos més rellevants que hi va publicar. L'editor d'aquesta monografia i gran coneixedor de Gardner, Fernando Blasco, titula el seu article introductori amb una frase que defineix perfectament el que aquest gran divulgador va aconseguir: «Martin Gardner, el hombre que convirtió a miles de niños en matemáticos y a miles de matemáticos en niños».

Seguint la idea de Gardner, que consisteix a anar del simple al complex, començarem la proposta de problemes amb algunes qüestions senzilles, però que fan «pensar» una mica, ja que no sempre, ni per a tothom, són de resolució immediata. Són petits problemes adequats per a alumnes de secundària. Els dos primers es van proposar als berenars matemàtics celebrats a Vilanova i la Geltrú el mes de novembre del 2014.

► **Problema 1.** Quin és el nombre enter positiu més petit tal que la suma de les seves xifres és 2014? És sorprenent com una senzilla divisió entera ens dóna tota la informació per a obtenir aquest nombre. Té sentit fer-se la mateixa pregunta si considerem el conjunt dels nombres enters? I preguntar-se pel nombre més gran?

► **Problema 2.** Una bóta es plena de vi. Omplim una gerra amb vi de la bóta i substituïm la quantitat extreta per una quantitat igual d'aigua. Repetim el procés cinc vegades de manera que al final la quantitat d'aigua a la bóta és la meitat que la de vi. Si ara buidem la bóta, quantes gerres necessitarem per omplir-la?

Seguirem amb uns altres dos problemes, senzills com els anteriors, però la resolució dels quals requereix una mica més d'atenció. El primer és de percentatges, un tema que sempre genera problemes curiosos, interessants de plantejar als alumnes i amb els quals cal anar amb compte a l'hora de resoldre'ls. Tant aquest problema com el següent, un curiós plantejament sobre les puntuacions d'un torneig, me'ls ha proposat l'amic Joan Miralles, de la Universitat Pompeu Fabra.

► **Problema 3.** Una síndria de 6 kg conté un 94% d'aigua. Després de deixar-la unes hores al sol, té un 90% d'aigua. Quant pesa ara la síndria?

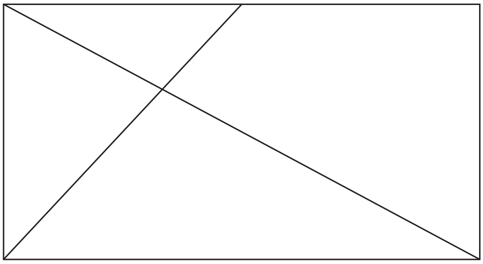
A vegades hi ha problemes que, després de llegir-los, sembla que ens falti informació per poder respondre el que ens demanen, o bé que la manera de trobar la solució és molt complicada. Això és el que sembla que passa amb el problema següent, però si penseu una mica veureu que tot era un miratge i que es pot resoldre d'una manera simple i elegant.

► **Problema 4.** El centre ha organitzat un torneig d'escacs amb un bon èxit de convocatòria, i en Lluís s'hi ha apuntat. Cada jugador disputarà una partida contra cadascun dels inscrits, excepte, òbviament, contra ell mateix. El guanyador de la partida s'anota un punt. Si en una partida es fan taules, cada jugador s'anota mig punt. Al final del torneig resulta que, sense comptar en Lluís, la resta de jugadors s'han anotat un total de 99 punts. Quants jugadors s'havien inscrit al torneig? Quants punts ha aconseguit en Lluís?

El mes de juliol de 2014 es va celebrar a Barcelona l'edició vint-i-cinquena de l'Olimpíada matemàtica per als petits, organitzada per la FEMCAT, i en la qual vaig tenir l'oportunitat de participar, primer proposant problemes per a la prova individual i els dies del concurs ja amb els participants, uns seixanta estudiants provinents de tot l'Estat espanyol, en una sessió que vam fer una nit d'estiu, després de sopar, a l'alberg Mare de Déu de Montserrat del barri de Vallcarca de Barcelona, on s'hostatjaven, analitzant i discutint les resolucions dels diferents problemes de la prova. Una vegada més, vaig quedar meravellat de les diverses i enginyoses solucions que aquest conjunt d'alumnes amb talent matemàtic van saber descobrir, i de com es feia realitat la citació de Pólya: «[per a aprendre matemàtiques] és millor resoldre un problema de cinc maneres diferents que resoldre'n cinc».

En record d'aquesta vetllada tan especial us proposo un dels problemes de la prova. Es tracta d'un cas de geometria que heu d'intentar resoldre per mètodes geomètrics elementals, i en tot cas, sense necessitat de plantejar cap sistema d'equacions. L'enunciat és el següent:

▶ **Problema 5.** En un rectangle de costats *a* i *b* dibuixem una diagonal i un segment que uneix un vèrtex, que no és en la diagonal, amb el punt mitjà d'un costat oposat (vegeu la figura). El rectangle inicial queda dividit en quatre figures, tres triangles i un quadrilàter. Quina és l'àrea de cadascuna de les quatre figures? Podeu expressar cada àrea com una fracció de l'àrea del rectangle inicial.



El proper problema, que em va proposar en Xavier Valls, té un caire geomètric com l'anterior, encara que en la seva resolució els nombres i les seves propietats juguen un paper rellevant. Com passa sovint, les relacions entre aritmètica i geometria ens ajudaran a trobar-ne la solució.

▶ **Problema 6.** Posem una bola al centre d'una taula de billar que mesura dos metres de llarg per un d'ample. Llancem la bola de manera que vagi rebotant pels costats de la taula. Si la bola torna a ser al centre de la taula, per primera vegada, després de fer un recorregut de 25 metres, sabríeu determinar quantes vegades ha rebotat la bola en els costats de la taula de billar durant aquest recorregut?

El problema següent, també de geometria, me'l va proposar, en un treball de problemes i recreacions matemàtiques sobre Lewis Carroll, la Sara Cambrón, una estudiant de magisteri de la meva assignatura sobre jocs i activitats matemàtiques. Tal com ella explica, el problema es troba en el llibre del reverend Charles Lutwidge Dogson *Problemas de almohada*.

▶ **Problema 7.** *a*) Donat un triangle qualsevol *ABC*, es tracta de trobar per on haurem de traçar una paral·lela (*DE*) a un dels costats del triangle (*BC*), de tal manera que la suma de les longituds dels dos segments determinats sobre el triangle entre la paral·lela i el costat *BC* sigui igual a la longitud del costat *BC*. És a dir, volem que es compleixi que $BD + CE = BC$.

b) I si volem que la suma dels dos segments anteriors sigui igual al segment *DE*?

Si ens fixem en la situació que ens ha permès plantejar el problema anterior, aviat ens adonarem que a partir d'una mateixa idea, aparentment simple, és possible plantejar diversos problemes de dificultat variable. La situació, podríem pensar-la així: Tallem un triangle amb una recta (paral·lela o no a un dels costats). En el cas de considerar la recta paral·lela, a més del problema anterior, podem plantejar un problema clàssic: per on traçarem la paral·lela si volem que les àrees de les dues figures determinades siguin iguals? I si volem que estiguin en una raó donada?

A partir de la mateixa situació, podem plantejar un problema, proposat per Pólya en la seva obra *Mathematical Discovery*, d'una dificultat molt superior, al meu entendre, a tots als anteriors i que ben segur us farà pensar una mica més que tots els altres junts. L'enunciat és el següent: Donat un triangle *ABC*, traceu una recta (que determina els punts *D*, sobre *AB*, i *E*, sobre *AC*) de tal manera que els segments *BD*, *DE* i *EC* tinguin la mateixa longitud

Per acabar aquesta miscel·lània de problemes petits i no tan petits, no podia faltar-ne un d'estratègia, prou senzill de resoldre, i que també vaig proposar als alumnes de l'Olimpíada. El joc diu així:

► **Problema 8.** *a*) Joc per a dos jugadors. S'escriuen dos nombres menors que 100 en un full de paper: per exemple, 35 i 24. El primer jugador resta els dos nombres (sempre el gran menys el petit) i anota el resultat en el paper. Ara el segon jugador tria dos dels tres nombres escrits, els resta i anota el resultat en el mateix paper. El joc segueix de manera que, en cada jugada, es resten dos nombres prèviament escrits i s'anota un nou nombre. Sempre es fa la resta de manera que el resultat sigui un nombre positiu. No és possible restar dos nombres si el resultat és un nombre que ja està escrit. El jugador que no pot escriure cap nou nombre perd la partida. Quin jugador, el primer o el segon a jugar, té avantatge? Com s'ha de jugar per guanyar?

b) Generalitzeu el joc, és a dir, determineu, per a dos nombres qualssevol, qui guanya i com s'ha de jugar per a fer-ho.

Acabaré l'article amb la bonica dedicatòria que Martin Gardner fa a l'inici del seu llibre *Gardner's Workout. Training the Mind and Entertaining the Spirit*. Diu així: «To all the underpaid teachers of mathematics, everywhere, who love their subject and are able to communicate that love to their students». Ben segur que els lectors del *Nou Biaix* us trobeu entre els dedicataris. Que sigui així per molts anys.

Bibliografia

Carroll, L. (2005). *Problemas de almohada*. Madrid: Nivola.

Gardner, M. (2001). *Gardner's Workout. Training the Mind and Entertaining the Spirit*. Natick, Mass.: A. K. Peters.

— (2014). El universo matemágico de Martin Gardner. Juegos, acertijos, paradojas y otras maravillas recreativas. Selecció d'articles i presentació de Fernando Blasco. *Investigación y Ciencia. Temas*, 77, tercer trimestre de 2014.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. Nova York: J. Wiley & Sons.